

**XLI Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 1 – 26 июля 2025 года**



**МАТЕМАТИКА. 8 КЛАСС. ОБЫЧНЫЕ ГРУППЫ.
МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ**

Группа «Админка-1»=



= {Сергей Вадимович Зеленов, Андрей Аркадьевич Теслер, Вадим Горячев, Витя Шевалдин, Ваня Загоскин, Вася Филимонов, Гоша Гарагашев, Степан Булатицкий, Макс Горяев, Миша Бобров, Павел Габидулин, Соня Пучкова, Мила Боева, Ева Яницкая, Лада Дмитриенко, Миша Рачков, Никита Боровков} \subset М8



Дорогие друзья!

Инъекцией различных идей мы старались направить вектор вашего развития на то, чтобы хорошенько повернуть мозги, бесподобно расширить знания массой новых подходов, научить вас ориентироваться в математике, не бояться множества проблем, а решительно идти на штурм.

В начале смены наш граф знакомств был несвязен, хотя некоторые из нас (вероятно, даже любые трое) имели общий интерес. Один шел искать паросочетания на дискотеке, другой хотел участвовать в турнире, третий любил пошалить во время отбоя, четвертый норовил выбрать выпуклую ватрушку наибольшего диаметра...

Однако, день ото дня мощность нашей компании неуклонно росла.

Мы перенесли дожди и грозы, отразили нападения комаров, разбили соперников в матчах... Объединение усилий при отображении клубных заданий в весёлые сценки, бесконечные разборы, вечерние линейки в холле, игры и бои в случайных комбинациях, ожидание дополнительной порции полдника...

Мало кто знает, но композиция всех этих событий спроецировалась в единое везучее условие.

Неслучайно, что исходом двадцатishестидневного эксперимента стал рост всевозможных показателей. За период смены граф знакомств превратился в сильно связный, степень каждой вершины в среднем необратимо увеличилась, и все теперь объединены общими интересами.

У каждого из вас царь в голове, а в руке зажато удостоверение об окончании курса.

Сам великий Эйлер был бы вами доволен.

О как!

Оглавление

Классическая геометрия	2
Спецкурсы по геометрии	12
Комбинаторная геометрия	15
Алгебра: неравенства	17
Теория чисел	23
Комбинаторика. Множества. Бесконечность	26
Теория графов	34
Усреднение и теория вероятностей	40
Соревнования и игры	45
Вопросы к зачёту	54

Классическая геометрия

Векторы-1 (3 июля 2025)

Направленным отрезком называется упорядоченная пара точек на плоскости. Обозначение. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается \overrightarrow{AB} .

Теорема. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} назовем *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм (возможно, вырожденный). Тогда все направленные отрезки разбиваются на классы, внутри которых любые два отрезка эквивалентны.

Классы направленных отрезков называются **векторами**.

Векторы называются **коллинеарными**, если соответствующие им направленные отрезки, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой.

Если при этом они лежат на одном луче, исходящем из этой точки, то векторы называются **сонаправленными**. Если на разных — **противоположно направленными**.

Действия с векторами

1. Сложение (правила треугольника и параллелограмма), вычитание.
2. Умножение вектора на число.

Письменное упражнение

1. Выполните операции с векторами: (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; (b) $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{ML}$; (c) $\overrightarrow{XZ} - 2 \cdot \overrightarrow{YZ}$, где Y — середина отрезка XZ .
2. Нарисуйте три вектора так, чтобы модуль суммы каждой двух из них был равен 1, а сумма всех трех была равна нулевому вектору.
3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

Векторы: задачи

1. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
2. Выразите вектор \overrightarrow{AB} через векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} , где $ABCD$ — параллелограмм.

Идея 1. Векторы, последовательно отложенные друг за другом и образующие «цикл», в сумме дают $\vec{0}$.

Идея 2. Правило треугольника обобщается для нескольких подряд идущих векторов. Иногда полезно представлять вектор как такую сумму.

Идея 3. Иногда помогает двумя способами представить один и тот же вектор как сумму нескольких, сложить все и поделить на два; особенно удобно,

если в разных суммах получатся противоположно направленные векторы одинаковой длины (потому что они уничтожатся).

3. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AB , а точка N — середина стороны CD . Выразите \overrightarrow{MN} через \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} .
4. Пусть K, L, M — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$.
5. В ориентированном графе в каждой вершине начинается столько же ребер, сколько и заканчивается. Если рассмотреть ориентированные ребра как векторы, то чему равна сумма всех векторов?
6. Дана шахматная доска 2025×2025 . Из центра каждой черной клетки провели вектор в центр каждой белой клетки. Чему равна сумма всех векторов?
7. Пусть M и N — середины отрезков AB и AC , точка P — середина отрезка MN , точка O — произвольная точка. Докажите, что $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$.
8. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE . Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.
9. Точки M, K, N, L — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что $PQ \parallel AE$. Во сколько раз AE длиннее PQ ?
10. На плоскости даны векторы, среди которых есть неколлинеарные. Сумма векторов без любого из них коллинеарна оставшемуся. Чему равна сумма всех?

Массы (4 июля 2025)

Материальной точкой (M, m) называется пара из точки плоскости M и ненулевого числа m , а само m называется **массой** материальной точки.

Центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$ с ненулевой суммой масс называется такая точка Z , для которой имеет место равенство:

$$m_1 \overrightarrow{ZM_1} + \dots + m_n \overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}.$$

Основная теорема. Если точка Z является центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$ с ненулевой суммой масс, то для любой точки O справедливо равенство:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + \dots + m_n}$$

Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы материальных точек.

Следствие. Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

Правило рычага. Центр масс Z двух материальных точек (M_1, m_1) и (M_2, m_2) расположен на прямой M_1M_2 .

Правило группировки. Пусть дана система материальных точек $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$, точка O_k — центр масс системы, состоящей из первых k точек. Тогда центр масс всей системы совпадает с центром масс системы материальных точек $(O_k, m_1 + \dots + m_k), (M_{k+1}, m_{k+1}), \dots, (M_n, m_n)$.

Идея. Если разделить точки на две группы и рассмотреть центры масс обеих групп, то центр масс всей системы будет лежать на прямой, их содержащей. Если сделать это еще раз, но по-другому, то узнаем, что центр масс лежит на какой-то другой прямой. Тогда центр масс всей системы — это пересечение полученных прямых.

Массы. Задачи

Упражнение. Найдите центр масс треугольника, в вершинах которого расположены одинаковые массы.

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также отрезка, соединяющего середины диагоналей четырехугольника.

2. Даны точки A, B, C, D , никакие три из них не коллинеарны. M, N — середины отрезков AB и CD соответственно, K — середина отрезка MN . P — точка пересечения медиан треугольника BCD . Докажите, что точки A, K, P коллинеарны.

3. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

4. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, такие что $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

5. Во время ЛМШ-2023 Александр Михайлович зарыл клад среди 2023 деревьев в лагере. После этого он написал капсулу времени на следующую смену, в которой указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т.д. К сожалению, Александр Михайлович забыл указать, как занумерованы деревья :(Какое минимальное

количество попыток нужно, чтобы гарантированно найти клад Александра Михайловича?

6. На окружности выбрали k точек и поместили в них равные массы. Докажите, что все прямые, проходящие через центр масс $k - 2$ точек и перпендикулярные хорде, проходящей через две оставшиеся точки, пересекаются в одной фиксированной точке.

7. Какие массы нужно поместить в вершины треугольника со сторонами a , b и c , чтобы центр полученной системы материальных точек оказался в:

(а) точке пересечения биссектрис;

(б) точке Нагеля (точке пересечения отрезков, соединяющих вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны — заодно докажите, что она существует);

(с) ортоцентре.

Поворот вектора (7 июля 2025)

Идея. Чтобы найти образ вектора при повороте, можно разложить его в сумму нескольких векторов и найти образ каждого слагаемого в отдельности, каждый раз выбирая свой, наиболее удобный для этого слагаемого центр поворота.

1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCP и CDQ . Докажите, что треугольник APQ правильный.

2. Равносторонние треугольники ABC и CDE имеют общую вершину C и одинаково ориентированы. Докажите, что середины отрезков AC , CE и BD являются вершинами равностороннего треугольника.

3. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n -угольника опущены перпендикуляры на стороны (или на их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

4. Во внешнюю сторону треугольника ABC построены квадраты $ACMN$ и $BCPQ$ с центрами X и Y соответственно. Точка O — середина AB . Докажите, что $OX = OY$ и $OX \perp OY$.

5. На плоскости даны три (одинаково ориентированных) квадрата: $ABCD$, $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2CD_2$; первый квадрат имеет с двумя другими общие вершины A и C . Докажите, что медиана BM треугольника BB_1B_2 перпендикулярна отрезку D_1D_2 .

6. На сторонах выпуклого четырехугольника наружу построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, перпендикулярны.

7. На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABM , CBP , CDL и ADK (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

Классификация движений (13 июля 2025)

Преобразованием плоскости называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя.

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

Свойства движений. Движение переводит:

- прямую в прямую, отрезок в равный ему отрезок, луч в луч;
- угол в равный ему угол;
- треугольник в равный ему треугольник;
- окружность в равную ей окружность;
- параллельные прямые в параллельные прямые.

Теорема о задании движения. Движение задается образами трех неколлинеарных точек.

Элементарные движения:

- тождественное отображение $(id): A \rightarrow A$;
- параллельный перенос на вектор \vec{u} ($T_{\vec{u}}$):
 $A \rightarrow A'$, при этом $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$;
- осевая симметрия относительно прямой l (S_l):
 $A \rightarrow A'$, при этом l является серединным перпендикуляром к отрезку AA' ;
- поворот на угол α вокруг точки O (R_O^α):
 $A \rightarrow A'$, при этом $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$.

Движением первого рода называется движение, которое не меняет ориентацию. **Движением второго рода** называется движение, которое меняет ориентацию.

Композицией движений F и G называется отображение $G \circ F$, т.е. результат последовательного применения движений F и G .

1. Покажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии, причем именно в таком порядке.

Скольльзящей симметрией называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Замечание. В данном случае композицию можно выполнять в любом порядке.

Теорема Шаля. Любое движение первого рода является параллельным переносом или поворотом, а любое движение второго рода — скольльзящей симметрией.

2. Доказательство теоремы Шаля.

(а) Покажите, что композиция переноса и поворота есть поворот, и докажите теорему для движений первого рода.

(b) Представьте поворот в виде композиции двух симметрий.

(с) Представьте движение второго рода в виде композиции переноса и симметрии или наоборот.

(d) Покажите, что композиция переноса и симметрии в любом порядке есть скольльзящая симметрия, и докажите теорему для движений второго рода.

3. Классифицируйте движения с точки зрения множества неподвижных точек.

4. Известно, что $R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta = R_{O_3}^\gamma$, и точки O_1, O_2, O_3 образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника.

5. Определите, что получится в результате композиции любых двух элементарных движений. Исследуйте все девять случаев и составьте таблицу. Если возможно, выразите характеристики композиции через характеристики движений.

Композиция движений: задачи

6. Найдите композицию осевых симметрий относительно серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

7. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

8. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ . Точка M — середина AB , точка O — центр треугольника BCQ . Докажите, что $OP = 2 \cdot OM$.

9. Даны треугольник ABC и точка X . Точка X_1 симметрична точке X относительно середины AB , точка X_2 симметрична точке X_1 относительно середины BC , точка X_3 симметрична точке X_2 относительно середины CA . Докажите, что точка X симметрична точке X_3 относительно вершины A .

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC последовательно сделали осевые симметрии относительно биссектрис углов A, B и C . Куда перешли вершины A, B и C ?

11. Постройте нечётноугольник по серединам его сторон с помощью циркуля и линейки.

Векторы-2 (15 июля 2025)

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC – точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geq AC$.

2. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведённые отрезки равны.

3. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ выбраны точки M, N, P, Q , соответственно так, что $\vec{AP} + \vec{AN} + \vec{CQ} + \vec{CM} = 0$. Докажите, что QN, PM и AC пересекаются в одной точке.

Идея. Вектора можно проектировать.

4. Дан произвольный треугольник ABC и такая прямая ℓ , пересекающая треугольник, что расстояние от неё до точки A равно сумме расстояний до этой прямой от точек B и C (причем B и C лежат по одну сторону от ℓ). Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

5. Докажите, что точки A, B, C принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда $\vec{OA} = k\vec{OB} + (1 - k)\vec{OC}$ для некоторого k .

6. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, причём $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ .

7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты такие точки P, M и K , что отрезки AM, BK и CP пересекаются в одной точке и сумма векторов \vec{AM}, \vec{BK} и \vec{CP} равна 0. Докажите, что P, M и K – середины сторон треугольника ABC .

Гомотетия (18 июля 2025)

Опр. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется отображение H_O^k плоскости на себя, которое любую точку M переводит в такую точку M' , что $\vec{OM'} = k \cdot \vec{OM}$.

Упр. Гомотетия — преобразование плоскости?

Свойства гомотетии. H_O^k переводит:

- прямую в параллельную ей прямую;
- отрезок длины a в отрезок длины $|k| \cdot a$;

- угол в равный ему угол;
- треугольник в подобный ему треугольник с коэффициентом подобия $|k|$;
- окружность радиуса r в окружность радиуса $|k| \cdot r$;

Упр. Докажите, что гомотетия сохраняет отношение на отрезке, то есть если точка M лежит на прямой AB и $\frac{MA}{MB} = k_1$, то $\frac{M'A'}{M'B'} = k_1$, где M', A', B' — образы точек M, A, B при гомотетии H_O^k .

Упр. Сколько существует гомотетий, переводящих:

- Отрезок в параллельный ему отрезок?
- Окружность в окружность, если их центры не совпадают?
- Треугольник в подобный ему треугольник со сторонами, параллельными его сторонам.

Невероятная идея 1. Если точка A переходит в точку A' при гомотетии с центром в точке O , то точки A, O и A' лежат на одной прямой.

Невероятная идея 2. Если отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$ при гомотетии, то $AB \parallel A'B'$.

Невероятная идея 3. Если какие-то фигуры (окружности, прямые) пересекались в точке A , то образы этих фигур при гомотетии пересекаются в образе точки A .

- Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.
- Две равные окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω внутренним образом в точках A и B . На ω выбрана произвольная точка M . C и D — точки пересечения MA и MB с ω_1 и ω_2 соответственно. Докажите, что $CD \parallel AB$.
- Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противоположных углов, пересекаются в одной точке.
- Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q (в таком порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

Содержательные задачи

- На основаниях трапеции во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий их центры, проходит через точку пересечения диагоналей.
- Две окружности касаются друг друга в точке P и сторон некоторого угла с вершиной Q . Некая прямая, проходящая через Q , пересекает окружности в точках A, B, C, D так, что порядок точек на прямой Q, A, B, C, D . Докажите, что $\angle APC = 90^\circ$.
- В $\triangle ABC$ вписанная и невписанная окружности касаются стороны BC в точках M и N соответственно.

- (a) MP — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, P, N лежат на одной прямой.
- (b) Пусть I — центр вписанной окружности, E — середина высоты AN треугольника ABC . Докажите, что точки E, N, I лежат на одной прямой.
- (c) Пусть I_A — центр внеписанной окружности, касающейся BC . Докажите, что точки E, M, I_A лежат на одной прямой.
8. (Лемма Архимеда) В окружности Ω проведена хорда AB . Окружность ω касается AB в точке K и окружности Ω в точке T внутренним образом. L — середина дуги AB , не содержащей точки T . Докажите, что точки K, T, L лежат на одной прямой.
9. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB , причём $A \in \omega_A, B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB , как на диаметре, повторно пересекает ω_A и ω_B в точках A' и B' . Докажите, прямые AB' и $A'B$ пересекаются на линии центров ω_A и ω_B .

Поворотная гомотетия (19 июля 2025)

Поворотной гомотетией с центром O , коэффициентом $k > 0$ и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ , имеющих общий центр O .

Замечание 1. Композицию можно делать в любом порядке: $R_O^\varphi \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\varphi$.

Замечание 2. Коэффициент k можно считать положительным, так как в ином случае можно заменить φ на $\varphi + 180^\circ$, и коэффициент k умножится на -1 .

Теорема 1. Окружности S и S' пересекаются в точках A и B . Тогда существует единственная поворотная гомотетия с центром в точке A , которая переводит S в S' .

Более того, образом точки $X \in S$ будет точка X' , в которой прямая XB вторично пересекает S' (если $X = B$, то прямая XB вырождается в касательную к S в точке B ; если XB пересекает S' только в точке B , то X переходит в B).

Теорема 2. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P . Тогда существует единственная поворотная гомотетия, которая переводит A в A_1 и B в B_1 , причем ее центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P .

Следствие. Центр поворотной гомотетии, переводящей \overline{AB} в $\overline{A_1B_1}$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей $\overline{AA_1}$ в $\overline{BB_1}$.

Теорема 3. Преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда любой вектор \vec{a}

переходит в вектор $k \cdot \vec{a}_\varphi$ (где \vec{a}_φ — это вектор, полученный из вектора \vec{a} поворотом на угол φ).

Упражнение. Что есть композиция двух поворотных гомотетий?

Ура, кажется, теория по поворотной гомотетии закончилась!

Поворотная гомотетия. Задачи

1. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота, опущенная на гипотенузу AB . Докажите, что угол LEM прямой.
2. Прямые, содержащие стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке E . Пусть точка M — середина AB , а N — середина CD . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE , ADE и MNE лежат на одной прямой.
3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD , в точке K . Пусть точка M — середина BC , а N — середина AD . Докажите, что точки B , M , N и K лежат на одной окружности.
4. Окружности $\omega_1, \dots, \omega_n$ пересекаются в точке O . Восьмиклассник прыгает из точки X_i окружности ω_i в такую точку X_{i+1} окружности ω_{i+1} (считаем, что $n + 1 = 1$), что прямая $X_i X_{i+1}$ проходит через точку пересечения окружностей ω_i и ω_{i+1} , отличную от O . Докажите, что через n прыжков он вернется в начальную точку.
5. Две окружности пересекаются в точках A и B , а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$, точка P — середина отрезка BN , а точка Q — середина отрезка MC . Докажите, что углы ANC и APQ равны.



Теперь неожиданные повороты не застанут вас врасплох!

Спецкурсы по геометрии

Метрические соотношения в окружности (8 июля 2025)

Определение. Пусть дана окружность ω и точка P . Прямая ℓ , проходящая через P , пересекает окружность ω в точках A и B . Тогда величина $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой ℓ . Определим для каждой точки P ее степень относительно окружности ω следующим образом:

$S(P) = PA \cdot PB$, если точка P лежит вне окружности;

$S(P) = -PA \cdot PB$, если точка P лежит внутри окружности;

$S(P) = 0$, если точка P лежит на окружности.

Замечание. Степень точки P относительно окружности с центром O и радиусом R можно определить как $OP^2 - R^2$.

1. Радиусы двух concentрических окружностей равны 33 и 31. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите ее длину.

2. В угол вписаны две окружности: одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2 , а другая – в точках L_1 и L_2 . Докажите, что прямая K_1L_2 отсекает на этих двух окружностях равные хорды.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , равны между собой углы BAC и CBD , а также углы BCA и CDB . Докажите, что касательные, проведённые из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD , равны.

4. BD – биссектриса угла B треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E , описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F . Докажите, что $AE = CF$.

Критерий вписанности четырёхугольника: если для O – точки пересечения лучей (отрезков) AB и DC (AC и BD) выполнено $OB \cdot OA = OC \cdot OD$ ($OA \cdot OC = OB \cdot OD$), то четырёхугольник $ABCD$ – вписанный.

5. Пусть AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке O . Пусть M – середина AO , а точка K на продолжении AB такая что $OB = BK$. Докажите, что точки M , C , D и K лежат на одной окружности.

6. Через точку P , лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что $KLMN$ вписанный.

7. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BL . На BC выбрана точка K так, что $CK = AL$. Докажите, что точки A , B , K и L лежат на одной окружности.

8. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A . Проведем в большей окружности Ω хорду CD , касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M середина отрезка AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD , проходит через центр ω .

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B , C , X и Y лежат на одной окружности.

10. Высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Диаметр CD описанной окружности треугольника ABC пересекает A_1B_1 в точке Q . Докажите, что H , C_1 , D и Q лежат на одной окружности.

Факт. ГМТ, имеющих равные степени относительно двух данных окружностей является прямой*, перпендикулярная линии центров.

Факт. Радиальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

11. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали – в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.

12. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E . Внутри четырехугольника выбрана точка P так, что $\angle PAB = \angle PBC$, $\angle PDC = \angle PCB$. Докажите, что PE делит отрезок BC пополам.

Идея. Точка тоже может рассматриваться как окружность.

13. Пусть AB , AC – касательные к окружности ω . Точки M , N – середины отрезков AB , AC , P – произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD – касательная к ω .

Вопрос. А как устроено ГМТ, для которых отношение степеней относительно двух данных окружностей равно $k \neq 1$?

14. Пусть две окружности пересекаются в точках A и B . Пусть $f(X)$ – отношение степеней точки X относительно этих окружностей. Докажите, что если $f(P) = f(Q)$, то A , B , P и Q лежат на одной окружности или прямой.

15. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках C и D . Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.

Лемма об изогоналях (18 июля 2025)

Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются **изогоналями**.

Критерий изогоналей. Даны угол AOB и точки P и Q внутри него. Обозначим за a_p и b_p расстояния от точки P до прямых AO и BO соответственно, а за a_q и b_q — расстояния от точки Q до тех же прямых. Тогда OP и OQ являются изогоналями тогда и только тогда, когда $a_p : b_p = b_q : a_q$.

Лемма об изогоналях. Даны угол AOB и точки P и Q внутри него, такие что OP и OQ — изогонали. Пусть AP и BQ пересекаются в точке X , а AQ и BP — в точке Y . Тогда OX и OY тоже являются изогоналями.

Замечание 1. Точки P и Q можно взять и снаружи угла, важно только, что OP и OQ — изогонали.

Замечание 2. Если какая-то пара прямых оказывается параллельной (AP и BQ или AQ и BP), то изогональ определяется как прямая, проходящая через O и параллельная той самой паре прямых.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота $\triangle ABC$.
2. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , а прямые AB и DC — в точке F . На луче FE отмечена точка P так, что углы BPE и CPE равны. Докажите, что углы APE и DPE тоже равны.
3. На диагонали AC ромба $ABCD$ отмечена произвольная точка E . На прямых AB и BC выбраны точки N и M соответственно, так что $NE = AE$ и $ME = CE$. Прямые AM и CN пересекаются в точке K . Докажите, что точки K , E и D лежат на одной прямой.
4. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD . Пусть точка P — точка пересечения BN и DM . Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.
5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что прямая CD разделяет точки P и Q , а углы AQD и CQB равны. Докажите, что углы BQP и DAQ равны.
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а точки K и L — центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и KJ пересекаются на биссектрисе угла BCD .
7. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Точка K является проекцией точки D на прямую EF . Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка A_1 диаметрально противоположна A в описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что DK — биссектриса угла HKA_1 .

Подсказка. Найдите биссектрису угла BKC .

Комбинаторная геометрия

Комбинаторная геометрия (12 июля 2025)

Мысль. Разбить на удобные части.

Пример. Внутри (не на границе) прямоугольника 7×12 выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя меньше 5.

1. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

2. Можно ли правильный треугольник со стороной 2 накрыть четырьмя квадратами со стороной 1? А тремя?

Определение. *Диаметром* множества называется расстояние между двумя самыми удаленными его точками.

Вопрос. Чему равен диаметр круга, квадрата, треугольника?

Мысль. Зажать чем-то удобным.

3. Всегда ли можно множество диаметра 1 покрыть кругом радиуса 0,5? Квадратом со стороной 1? А кругом радиуса 1?

4. Докажите, что (а) всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в параллелограмм площади 2; (б) треугольник площади 1 нельзя заключить в параллелограмм площади меньше 2.

Еще мысль. Применить различные комбинаторные идеи.

5. На какое наименьшее число связных частей можно разрезать круг, чтобы все части оказались меньшего диаметра?

6. Докажите, что одна из проекций точки внутри выпуклого многоугольника на его стороны упадет на сторону, а не на продолжение.

7. В квадрате со стороной 1 лежат пять непересекающихся квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Докажите, что сумма их периметров не превосходит 10.

8. Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1. Придумайте как можно больше решений.

Упр. На плоскости отмечены 4 точки, не лежащие на одной прямой. Сколько может существовать четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Опр. Множество M точек на плоскости называется **выпуклым**, если для любых точек $A, B \in M$ весь отрезок AB принадлежит M .

1. Выпукло ли пересечение двух выпуклых множеств? А объединение?
2. Выпуклое множество содержит три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Докажите, что оно содержит весь треугольник ABC .

Факт. Всякий выпуклый многоугольник — пересечение конечного количества полуплоскостей. (А верно ли обратное?)

3. Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше, чем внешнего.

Теорема Хелли. На плоскости даны $n \geq 3$ выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что есть точка, общая для всех n множеств.

4. Докажите теорему Хелли: (а) для $n = 4$; (б) для произвольного конечного n . (с) Верна ли она, если количество множеств бесконечно?
5. Арсений отметил на плоскости несколько точек так, что каждые три из них можно накрыть пятаком. Докажите, что все точки можно накрыть одним пятаком.
6. На плоскости отмечены несколько точек, причём расстояние между любыми двумя точками не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Можно ли улучшить эту оценку?

На самом деле теорема Хелли верна для бесконечного количества множеств, если каждое из них ограничено (помещается внутри какого-то круга) и замкнуто (содержит свою границу). С учётом этого предыдущая задача превращается в такой факт: любое множество диаметра 1 можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).

7. Дана выпуклая ограниченная двумерная фигура. Назовём точку внутри неё центральной, если любая хорда, проведённая через эту точку, делится в отношении не более $2 : 1$ (то есть больший отрезок хорды не превышает удвоенного меньшего). (а) Используя бесконечную версию теоремы Хелли, докажите, что в любой выпуклой фигуре существует центральная точка. (б) Возможно ли, что она всего одна?

8. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Для любых трёх отрезков существует прямая, пересекающая их. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все отрезки.

Алгебра: неравенства

Неравенство о средних (3 июля 2025)

Средним арифметическим n чисел называется их сумма, делённая на n :
 $A(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

Средним геометрическим n неотрицательных чисел называется корень n -й степени из их произведения: $G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

1. Среднее арифметическое чисел a, b, c, d, e равно f . А чему равно среднее арифметическое чисел a, b, c, d, e, f ?

2. (а) Александр Михайлович написал на доске $d + t$ чисел и попросил Машу и Диму найти их среднее арифметическое. Маша и Дима решили поделить работу между собой: Маша нашла среднее первых t чисел, Дима — последних d чисел, а потом они нашли среднее арифметическое двух полученных чисел. При каких d и t можно быть уверенным, что Маша и Дима получили верный результат? (б) Аналогичный вопрос о средних геометрических.

Для любых n положительных чисел a_1, \dots, a_n выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

причём равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

3. Докажите это неравенство: (а) при $n = 2$; (б) при $n = 4$; (с) при $n = 3$.

4. Докажите его для всех натуральных $n > 1$.

5. Сумма длин всех рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 24 см. Каков его максимальный объём?

6. Докажите, что при положительных x выполняются неравенства:

(а) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (сумма двух взаимно обратных чисел); (б) $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$.

7. Для положительных a, b, c докажите неравенства:

(а) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$; (б) $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

8. Произведение пяти положительных чисел a, b, c, d, e равно 1. Докажите, что $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e) \geq 32$.

9. Найдите минимальное значение следующих выражений при $x > 0$:

(а) $x^n + \frac{n}{x}$; (б) $x^2 + \frac{8}{x}$; (с) $\frac{x^4}{9} + x^2 + \frac{54}{x} + \frac{729}{x^4}$.

10. **Средним гармоническим** нескольких чисел a_1, \dots, a_n называется такое число H , что $\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$, то есть обратное к среднему арифметическому обратных. Докажите, что среднее гармоническое нескольких положительных чисел не больше их среднего геометрического.

С учётом последней задачи неравенство о средних можно записать так:

$$H(a_1, \dots, a_n) \leq G(a_1, \dots, a_n) \leq A(a_1, \dots, a_n).$$

Разные неравенства (5 июля 2025)

Идея 1. Раскрыть скобки (или разложить на множители).

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a \geq b \geq c$ и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.
2. Докажите, что если $a + b + c + d = 0$, то $ab + bc + cd + da + ac + bd \leq 0$.
3. Известно, что $ab - 1 < a - b$, $ac - 1 < a - c$. Докажите, что $bc + 1 > b + c$.

Идея 2. Замена переменных.

4. Числа x, y, z больше 1. Докажите, что $xy + yz + xz < 2xyz + 1$.

Идея 3. Нарушение симметрии. Иногда задача выглядит симметричной (то есть переменные входят в условие равноправно), но для решения полезно выбрать, например, наибольшую из них.

5. Положительные числа a, b, x, y таковы, что $ab \geq ax + by$. Докажите, что $x + y$ не превосходит наибольшего из чисел a и b .

Идея 4. Между нулём и единицей. Что происходит с числом $x \in (0; 1)$ при возведении в квадрат?

6. Пусть $x, y \in [0, 1]$. Докажите, что $x + y \geq 2xy$.
7. Докажите, что если $x, y \in (0, 1)$, то $\frac{x}{x + y^2} + \frac{y}{y + x^2} > 1$.
8. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 < b$, $b^2 < c$, $c^2 < a$. Какое максимальное количество из них может быть больше 1?
9. Пусть $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$. Найдите все такие значения a , для которых верно равенство $f(f(f(f(a)))) = a$.
10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $(a + b + 2c)^2 > d$, $(b + c + 2d)^2 > a$, $(c + d + 2a)^2 > b$, $(d + a + 2b)^2 > c$. Докажите, что $a + b + c + d > \frac{1}{4}$.
11. Существуют ли такие 2025 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2024 из них не меньше квадрата оставшегося?
12. Положительные числа x, y и z таковы, что $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z + xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x + yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y + zx}} \leq \frac{1}{2}.$$

Фамилию Штурм носили по крайней мере два математика: француз Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855) и немец Фридрих Отто Рудольф Штурм (1841–1919). Нам не удалось установить, кому из них принадлежит этот метод.

Сближение

Упр. Пусть даны два положительных числа a и b . Возьмём два таких числа a' и b' , что $a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$ (то есть *сблизим* a и b). Тогда $a'b' > ab$.

Упр. Среди прямоугольников с равным периметром площадь больше у того, который ближе к квадрату.

1. В тех же условиях ($a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$) сравните выражения: (а) $a^2 + b^2$ и $a'^2 + b'^2$; (б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$; (с) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.

2. Теперь наоборот: пусть два положительных числа a и b сблизили так, что их произведение не изменилось. Увеличатся или уменьшатся следующие выражения: (а) $a + b$; (б) $a^2 + b^2$; (с) $a^3 + b^3$; (д) $a^4 + b^4$?

3. У двух мониторов совпадает диагональ, но один из них более вытянутый, а второй «более квадратный». У какого монитора больше площадь? А периметр?

Метод Штурма

Пусть переменных больше двух. На каждом шаге возьмём две «крайних» переменных и сблизим их так, чтобы одна из характеристик (например, сумма) не менялась. Важно, чтобы процесс сближения был конечным (в конце процесса все переменные становятся равными).

Упр. Даны числа 1, 5, 9, 14, 21; их среднее арифметическое равно 10. На каждом шаге берём наибольшее и наименьшее из чисел a и b и заменяем их на 10 и $a + b - 10$. Следим за тем, как изменяется их произведение.

Упр. Для n неотрицательных чисел с данной суммой произведение максимально, когда все они равны.

Липа №1. Пусть есть неравные числа. Будем по очереди брать произвольные два числа a и b и заменять их на $\frac{a+b}{2}$. В результате сумма не меняется, а произведение увеличивается. В конце концов придём к ситуации, когда числа равны, а произведение увеличилось. Значит, для равных чисел оно больше, чем для неравных.

Липа № 2. Пусть максимальное произведение достигается для неких значений переменных a_1, \dots, a_n . Если какие-то два из них не равны, то можно сблизить их между собой, и произведение увеличится — противоречие.

Метод Штурма. Задачи

4. В графе 77 вершин. Какое максимальное число рёбер в нём может быть, если он (a) двудольный; (b) «трёхдольный»; (c) «семидольный»?

5. Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$.

6. Докажите методом Штурма, что *среднее квадратическое* неотрицательных чисел не меньше их среднего арифметического:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

7. Пусть $x_1 + \dots + x_n = 1$. Докажите, что $\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1\dots x_n} \geq (n-1)^n$.

8. Докажите, что если все $x_i \geq 1$, то

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}.$$

9. Пусть сумма положительных чисел x , y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

10. Сумма пяти двузначных чисел равна 333. При каких значениях чисел сумма их квадратов максимальна?

11. Рассмотрим всевозможные n -угольники, вписанные в данную окружность.

(a) Докажите, что если среди них есть многоугольник наибольшей площади, то он правильный.

(b) Докажите, что правильный n -угольник действительно имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в окружность.

(c) Докажите, что чем больше n , тем больше площадь правильного n -угольника, вписанного в окружность.

Упр. Есть три пачки банкнот номиналом 50, 100 и 500 рублей соответственно. Учитель сказал, что выдаст на карманные расходы каждому по 2 банкноты из одной пачки, 3 из другой и 5 из третьей. Хулиган Вася хочет, чтобы у него получилась максимальная сумма, а у отличницы Маши – минимальная. Как этого достичь?

Упр. Пусть $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

Идея. Если поменять местами пару «бэ-шек» так, чтобы они шли «правильно», то сумма увеличится. А если так, чтобы они шли «наоборот», то сумма уменьшится.

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Пусть c_1, \dots, c_n – произвольная перестановка чисел b_1, \dots, b_n . Тогда:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

Геометрическая интерпретация. Расположим массы m_1, m_2, \dots, m_n в точках координатной прямой с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть x_z – центр масс полученной системы материальных точек: $x_z = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. Для какой перестановки масс центр масс x_z расположен правее всего? левее всего?

1. Пусть $a \geq b \geq c$ – произвольные вещественные числа. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию: $\bullet a^3, b^3, c^3$; $\bullet a + b, b + c, c + a$.

2. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию:

$$\bullet a^2, b^2, c^2; \quad \bullet \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}; \quad \bullet ab, bc, ca; \quad \bullet \frac{b}{\sqrt{ac}}, \frac{a}{\sqrt{bc}}, \frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

3. Докажите, что для произвольных вещественных a, b, c, d верно:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da.$$

4. Докажите, что для положительных a, b, c, d верно:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

5. Докажите, что для положительных a, b, c верно:

$$(a) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a + b + c}{abc}; \quad (b) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c;$$

$$(c) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}; \quad (d) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$(e) ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab};$$

¹Транс... (от лат. trans – сквозь, через, за), составная часть сложных слов, означающая: 1) движение через какое-либо пространство, пересечение его (*трансатлантический*); 2) следование за чем-либо, расположение по ту сторону чего-либо (*трансальпийский*); 3) обозначение или передача через посредство чего-либо (*транслитерация, трансмиссия*).

$$(f) \ a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1};$$

$$(g) \ a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

6. Докажите, что для положительных a, b, c верно: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

7. Для $a, b, c \geq 1$ докажите неравенство: $\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3$.

8. Для положительных a_1, a_2, \dots, a_n докажите: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

9. Пусть m_1, \dots, m_n – различные натуральные числа. Докажите, что:

$$m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{9} + \dots + \frac{m_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

10. Неравенство Чебышёва. Докажите, что для чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ выполнено неравенство:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$



Надеемся, что ваша память не пострадала

Теория чисел

Функция Эйлера (8 июля 2025)

Упр. Выписали все правильные дроби со знаменателем 30. Сколько среди них несократимых?

Упр. Выписали все правильные дроби со знаменателем 30 и привели их все к несократимому виду. Сколько получилось дробей для каждого знаменателя?

Опр. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, не больших n и взаимно простых с n . Отображение φ называется *функцией Эйлера*.

Упр. Заполните таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	30
$\varphi(n)$										

- Докажите, что $\varphi(n)$ чётно для всех $n > 2$.
- Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n .
- (Тождество Гаусса) Докажите, что любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей: $n = \sum_{n:d} \varphi(d)$.
- (a) Пусть p – простое число. Найдите: $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(p^k)$.
(b) Пусть m – произвольное натуральное число. Найдите $\varphi(m^k)$.
- Пусть m и n взаимно просты. Все натуральные числа от 1 до mn подряд выписали в таблицу по строкам, так что получилось m строк по n столбцов (в первой строке числа от 1 до n , во второй – от $n+1$ до $2n$, и т.д.). Сколько в каждом столбце получилось чисел, взаимно простых с m ?
- Докажите, что для любых взаимно простых a и b верно: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
- Докажите, что если $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, то

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \dots p_n^{k_n-1}(p_n - 1) = \\ &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).\end{aligned}$$

8. Решите в натуральных числах:

(a) $\varphi(n) = \frac{n}{2}$; (b) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$; (c) $\varphi(n) = \frac{n}{7}$; (d) $\varphi(n) = \frac{n}{k}$.

9. Пусть $p > 3$ – такое простое число, что $3p - 2$ – тоже простое. Докажите, что $\varphi(9p) = \varphi(12p - 8)$.

10. Решите в натуральных числах: (a) $\varphi(17n) = 17\varphi(n)$; (b) $\varphi(n) = 16$.

11. Докажите следующие свойства функции Эйлера:

(a) $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\text{НОД}(m, n)) \cdot \varphi(\text{НОК}(m, n))$;

(b) $\varphi(mn) \cdot \varphi(\text{НОД}(m, n)) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \text{НОД}(m, n)$;

(c) Если $a : b$, то $\varphi(a) : \varphi(b)$.

Теорема Эйлера (14 июля 2025)

Опр. Полной системой вычетов по модулю n называется множество всех остатков по модулю n . Обозначается \mathbb{Z}_n

Опр. Приведенной системой вычетов по модулю n называется множество остатков по модулю n , взаимно простых с n . Обозначается \mathbb{Z}_n^* .

Упр. Сколько элементов в приведенной системе вычетов по модулю n ?

1. Пусть есть отображение $f : \mathbb{Z}_n^* \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $f(x) = ax \pmod{n}$ для некоторого a , взаимно простого с n .

(a) Докажите, что $\forall x \in \mathbb{Z}_n^* : f(x) \in \mathbb{Z}_n^*$.

(b) Докажите, что f — биекция $\mathbb{Z}_n^* \rightarrow \mathbb{Z}_n^*$.

(c) Пусть $\{r_1, \dots, r_{\varphi(n)}\}$ — приведенная система вычетов по модулю n . Что произойдет с произведением $r_1 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)}$ после применения отображения f ?

(d) Докажите теорему Эйлера: Если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

2. Существует ли степень тройки, оканчивающаяся на 0001?

3. Найдите остаток числа $43^{4321} \pmod{2025}$.

4. Найдите последние 4 цифры числа $2^{1000} + 5^{1000}$.

5. Пусть известно, что $(m, 30) = 1$. Докажите, что $\underbrace{11 \dots 11}_{\varphi(m)} \div m$.

6. Сделаем теорему Эйлера круче. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$. Обозначим $f(n) = \text{НОК}(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \dots, \varphi(p_m^{\alpha_m}))$. Тогда для любого a , взаимно простого с n , выполнено $a^{f(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

7. Имеется последовательность $a_n = x + nd$, где x, d — натуральные числа, такие, что $(x, d) = 1$. Докажите, что среди членов этой последовательности встречается бесконечно много чисел, которые являются степенями числа x .

Показатели (17 июля 2025)

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: $1, a, a^2, \dots$. Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

Определение. Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется показателем a по модулю n . Далее будем обозначать его буквой d .

2. Зафиксируем взаимно простые числа a и n .

(a) Докажите, что d — показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d — наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n .

- (b) Пусть d – показатель a по модулю n . Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d|l$.
- (c) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
- (d) Докажите, что показатель любого взаимно простого с n числа по модулю n делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).
3. Найдите все простые p и q такие, что $q|(2^p - 1)$ и $p|(2^q - 1)$.
4. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.
5. (a) Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$, или имеет вид $2px + 1$.
- (b) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.
6. Найдите все простые p и q , для которых $5^p + 5^q$ делится на pq .

Оценки в теории чисел (19 июля 2025)

В этих задачах что-то возможно или невозможно не из соображений делимости (хотя они тоже могут учитываться), а из соображений величины чисел (большие или маленькие, близко или далеко друг от друга и т. д.)

1. Может ли число $n^6 + 2n^3 + 1$ быть кубом натурального числа при каком-то натуральном n ?
2. Верно ли, что к любому двузначному числу можно справа приписать (a) ещё две цифры; (b) ещё три цифры, чтобы получился квадрат натурального числа?
3. Будем называть натуральное число красивым, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?
4. Может ли произведение пяти последовательных натуральных чисел равняться произведению пяти последовательных чётных натуральных чисел?
5. Верно ли, что между каждыми двумя последовательными пятыми степенями натуральных чисел найдётся куб натурального числа?
6. Существует ли такое натуральное n , что запись числа n^{2025} начинается на 2025?
7. Докажите, что числа 2026^n и $2026^n + 2^n$ содержат одинаковое количество цифр.

Комбинаторика. Множества. Бесконечность

Числа и цвета (2 июля 2025)

1. Все натуральные числа раскрасили в два цвета: желтый и зеленый. Известно, что сумма любых двух различных желтых чисел также является желтым числом. Кроме того, сумма любых двух зеленых чисел также является зеленым числом. Сколько различных раскрасок, удовлетворяющих этому условию, существует?
2. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы сумма любых четырех чисел одного цвета имела бы этот же цвет?
3. Докажите, что если все натуральные числа раскрасить в два цвета, то найдутся два числа одного цвета с разностью 20 или 25.
4. Школьник на уроке заскучал и начал красить каждое натуральное число в белый, синий или красный цвет так, чтобы все три цвета присутствовали и выполнялось свойство: цвет суммы любых двух разноцветных чисел не совпадает с цветами слагаемых. Удастся ли ему это сделать?
5. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета, синий и красный, так, что сумма каждых двух синих (в том числе одинаковых) синяя, а произведение каждых двух красных (в том числе одинаковых) красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2025?
6. Каждое натуральное число покрашено в оранжевый или фиолетовый цвет. Известно, что в любом наборе из нескольких последовательных чисел количества оранжевых и фиолетовых чисел отличаются не более, чем на 1000. Докажите, что существуют 2000 последовательных чисел, среди которых ровно 1000 фиолетовых и 1000 оранжевых.
7. Натуральные числа раскрашены в семь цветов. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел одного цвета с одинаковой разностью.
8. Артем и Катя играют в следующую игру: каждым ходом Артем выбирает натуральное число, которое еще не красили, а Катя красит его в черный или белый цвет по своему усмотрению. Катя хочет, чтобы в некоторый момент между двумя одноцветными числами нашлись 2025 чисел другого цвета. Сможет ли Артем ей помешать?
9. *Добавка.* Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа. Верно ли это для большего количества цветов?

В математике понятие множества не определяется.

Под *множеством* понимается набор каких-либо объектов (*элементов*).

Опр. Множество называется *пустым* (пишут: \emptyset), если в нем не содержится ни одного элемента.

Опр. Если объект x *принадлежит* множеству A , то пишут $x \in A$.

Опр. Если любой элемент множества A принадлежит множеству B (т.е. $x \in A \Rightarrow x \in B$), то A является *подмножеством* множества B (пишут: $A \subset B$).

Опр. Множества *совпадают* ($A = B$), если состоят из одних и тех же элементов.

Упр. Для произвольных множеств A, B, C выполнено: (a) $\emptyset \subset A$;

(b) $A \subset A$ (рефлексивность отношения \subset);

(c) $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$ (антисимметричность \subset);

(d) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (транзитивность \subset).

Способы задания множеств.

(a) Перечислить все элементы множества.

(b) Указать, откуда брать элементы, и какому свойству они должны удовлетворять. Такое свойство называется *характеристическим*. «Исходное» множество, из которого мы берем элементы, называется *универсальным*¹.

Примеры. (a) Множество из четырех элементов: $A = \{1, 2, B, x\}$;

(b) Множество чётных натуральных чисел: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 2\}$;

(c) Множество решений уравнения: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 7 = 0\}$.

Упр. Задайте множество через характеристическое свойство: (a) множество $\{1, 3, 5, \dots\}$; (b) отрезок $[-12; 1,5]$; (c) луч $[-12; +\infty)$; (d) окружность с центром в точке O и радиусом 3; (e) серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Опр. *Объединение* (*сумма*) множеств A и B ($A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B , т.е.: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$. Иначе: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Опр. *Пересечение* множеств A и B есть множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Опр. *Разность* множеств A и B есть множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Опр. Пусть U – универсальное множество. Тогда *дополнением* множества A называется множество $\bar{A} = U \setminus A$.

Упр. Докажите, что: (a) $A \cup B = B \cup A$; (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(c) $A \cup \bar{A} = U$; (d) $A \cap \bar{A} = \emptyset$; (e) $\bar{\bar{A}} = A$; (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Упр. Имеется множество A , состоящее из n элементов. Сколько в нем: (a) подмножеств из k элементов; (b) всего подмножеств?

¹Universum (лат.) – вселенная.

Множества. Задачи

1. Изобразите на декартовой плоскости множества точек (x, y) , удовлетворяющих соотношениям:

- $x^2 + y^2 \leq 25$;
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25; \end{cases}$
- $(x^2 + y^2 - 25)(x + 7y - 25) = 0$;
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ x + 7y \geq 25; \end{cases}$
- дополнение множества из предыдущего пункта.

2. Решите следующую задачу и запишите её условие на языке множеств:

«В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги — волшебники?»

3. Решите уравнение: $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 1$.

4. Как известно, для чисел верно следующее соотношение на сумму и разность: $a + (b - c) = (a + b) - c$.

Верно ли аналогичное соотношение для множеств: $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?

5. Докажите, что:

- (a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- (c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
- (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
- (e) $B \subset A \Leftrightarrow B \cup A = A$;
- (f) $B \subset A \Leftrightarrow B \cap A = B$.

6. Имеется множество C , состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы: (a) множества A и B не пересекались; (b) множество A содержалось бы в множестве B ?

7. В М-8 образовались компании школьников так, что для любых двух компаний A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже компания. Докажите, что для любых двух компаний A и B компанией также является и $A \cup B$.

8. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса. *Попробуйте решить задачу как можно большим количеством способов.*

Опр. *Отображением* множества A в множество B называется такое правило, которое **каждому** элементу $a \in A$ ставит в соответствие **единственный** элемент $f(a) = b \in B$. Элемент b – *образ*, a – *прообраз*.

Множество A – *область определения*, B – *область значений*.

Обозначения. $f : A \rightarrow B$. $A \xrightarrow{f} B$. $f : a \mapsto b$. $a \xmapsto{f} b$.

Упр. Являются ли отображениями следующие соответствия? Если да, то назовите область определения и область значений. Если нет, то предложите, как изменить область определения или область значений, чтобы получилось отображение. (a) многоугольник \mapsto количество сторон; (b) окружность \mapsto радиус; (c) цветок \mapsto цвет лепестка; (d) дата \mapsto температура около медпункта ЛМШ в 12-00; (e) человек \mapsto дата рождения; (f) человек \mapsto рост; (g) работник \mapsto начальник; (h) человек \mapsto мать; (i) человек \mapsto бабушка; (j) человек \mapsto брат; (k) натуральное число \mapsto сумма цифр; (l) целое число \mapsto остаток от деления на 10; (m) целое число \mapsto последняя цифра; (n) число \mapsto квадрат числа; (o) $x \mapsto x^3$; (p) пара целых чисел \mapsto дробь; (q) пара натуральных чисел \mapsto дробь; (r) точка на декартовой плоскости \mapsto ордината; (s) число \mapsto то же число.

Опр. Отображение $id_A : A \rightarrow A : x \mapsto x$ называется *тождественным*.

Опр. Два отображения $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow B$ называются *равными*, если для всех $a \in A$ верно $f(a) = g(a)$. Пишут: $f = g$.

Упр. Найдутся ли такие множества X и Y и такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что: (a) во множестве X найдется элемент, не имеющий образа; (b) во множестве X найдется элемент, имеющий несколько образов; (c) во множестве Y найдется элемент, не имеющий прообраза; (d) во множестве Y найдется элемент, имеющий несколько прообразов?

Замечание. Отображение числовых множеств обычно называют *функцией*.

Упр. Приведите пример функции $\mathbb{N} \rightarrow \square$. Как мы называем такие функции?

Замечание. Функцию $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обычно изображают в виде *графика*.

Упр. (a) Изобразите графики функций: $f(x) = 3$; $g(x) = 2x - 3$.

(b) Является ли график $x^2 + y^2 = 1$ графиком какой-нибудь функции $x \mapsto y$?

Опр. Отображение $f : A \rightarrow B$ называется

- *инъективным*, если **разные переходят в разные**: $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$;
- *сюръективным*, если **у всех есть прообраз**: $\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$;
- *биективным* (или *взаимно однозначным соответствием*), если оно одновременно и инъекция, и сюръекция.

Упр. (a) Какие отображения из первого упражнения являются инъективными? сюръективными? биективным?

(b) Приведите пример инъективного, но не биективного отображения.

Опр. Пусть заданы два отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$. Их *композицией* называется отображение $A \xrightarrow{h} C$, определённое соотношением: $h(x) = g(f(x))$ для любого $x \in A$. Пишут: $h = g \circ f$ (отображения применяются справа налево).

Упр. Что такое: (a) «год рождения» \circ «мать»; (b) «мать» \circ «мать»; (c) «мать» \circ «отец»; (d) «имя» \circ «отец» \circ «начальник» \circ «мать»; (e) « $z = y^3$ » \circ « $y = 3x + 5$ »; (f) « $z = 3y + 5$ » \circ « $y = x^3$ »; (g) « x^3 » \circ « x^2 »?

Опр. Отображение $g : B \rightarrow A$ называется *обратным* к отображению $f : A \rightarrow B$, если $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$. Пишут: $g = f^{-1}$.

Упр. Какие отображения из первого упражнения имеют обратные?

Упр. Как выглядят графики отображений $y = 2x - 3$, $y = x^3$ и обратных к ним?

Отображения. Задачи.

1. Пусть A – множество из m элементов, B – множество из n элементов. Сколько существует (a) всевозможных; (b) инъективных отображений $A \rightarrow B$?

2. Верны ли следующие равенства для любого отображения f :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

3. Докажите, что отображение $f : A \rightarrow B$ инъективно тогда и только тогда, когда $\forall X, Y \subset A \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

4. Приведите пример, когда $f \circ g$ – тождественное, а $g \circ f$ – нет.

5. Приведите примеры, когда: (a) $f \circ g = g \circ f$; (b) $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Верно ли, что:

(a) f и g биекции $\Rightarrow g \circ f$ биекция; (b) $g \circ f$ биекция $\Rightarrow f$ и g биекции;

(c) $g \circ f$ инъекция $\Rightarrow f$ инъекция; (d) $g \circ f$ сюръекция $\Rightarrow g$ сюръекция?

7. Существует ли такое $f : A \rightarrow A$, что $f \neq id_A$ и $f \circ f = f^{-1}$?

8. Докажите, что следующие условия равносильны:

• f обратимо; • все прообразы f одноэлементны; • f биекция.

9. Докажите, что если f и g обратимы, то $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

10. Установите биективные соответствия между следующими множествами:

(a) все подмножества конечного множества A и все отображения $A \rightarrow \{0, 1\}$;

(b) все подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, состоящие из четного числа элементов, и все подмножества, состоящие из нечетного числа элементов;

(c) точки отрезка $[-1, 1]$ и точки отрезка $[0, 2025]$;

(d) векторы длины 1 и точки окружности.

(е) точки интервала $(0, 1]$ и точки луча $[1, +\infty)$;

(f) точки полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y > 0$ и точки прямой $y = 1$.

11. Пусть s – отображение, сопоставляющее натуральному числу его сумму цифр, а res_k – отображение, сопоставляющее натуральному числу остаток от деления его на k . Для каких k выполнено равенство $s \circ res_k = res_k \circ s$?

12. Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, состоящему из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.

Комбинаторика бесконечного (14 июля 2025)

1. При каком наименьшем N среди N бесконечных десятичных дробей найдутся две, совпадающие в бесконечном числе разрядов?

2. Есть несколько монет шести номиналов: 100, 50, 10, 5, 2, 1. Разрешается поменять монету на любое количество монет меньших номиналов. Могут ли обмены происходить бесконечно долго?

3. Дана бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, больших 1. Конечно ли множество таких чисел, что они больше своего номера в этой последовательности?

4. Дима ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Может ли процесс продолжаться бесконечно?

5. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Сергей Вадимович пишет вместо него число $y = \frac{x \cdot (p-1)^k}{p}$, где p – какой-нибудь простой делитель числа x , а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Сергея Вадимовича получится 1.

6. Джинн решил построить бесконечную башню из бесконечного количества кирпичей. На каждом кирпиче он написал натуральное число так, что для любого натурального числа k ровно на k кирпичах написан какой-нибудь делитель k . Докажите, что любое натуральное число можно найти на хотя бы одном кирпиче.

7. **Лемма Ньюмана.** Дан ориентированный граф с (а) конечным; (б) бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину v графа потомком вершины u графа, если существует путь из u в v . Если есть стрелка из u

в v , то v назовем ребенком вершины u . Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины графа у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины графа существует единственный потомок исходящей степени 0.

Счётность (18 июля 2025)

Опр. Множества A и B называются *равномощными*, если существует биекция $f : A \rightarrow B$. Пишут: $A \cong B$.

Упр. Докажите: (a) $A \cong A$; (b) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$;

(c) $A \cong B$ и $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

Упр. Конечные множества A и B равномощны $\Leftrightarrow A$ и B содержат одинаковое количество элементов.

Упр. Пусть A — множество чётных натуральных чисел. Докажите, что $A \cong \mathbb{N}$.

Опр. Множество A называется *счётным*, если $A \cong \mathbb{N}$.

Упр. Любое подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.

Упр. Пусть $M = \{A_1, A_2, \dots\}$ — счётное множество, где каждое A_i — конечное множество. Верно ли, что объединение всех множеств A_i всегда счётно?

Присказка. В тридесятom государстве бесконечно много граждан. В столице есть супер-гостиница с бесконечным количеством номеров. Все номера в супер-гостинице пронумерованы натуральными числами подряд начиная с 1.

Упр. Однажды, когда все номера в супер-гостинице были заняты, приехал еще один постоялец. Как найти ему отдельное место в этой гостинице, никого из нее не выселяя? А если приедут миллиард новых постояльцев?

1. Пусть есть две полностью заселённые супер-гостиницы. Первую закрыли на ремонт. Как найти всем постояльцам первой гостиницы отдельные места во второй гостинице, никого из второй не выселяя?

2. Любое ли счётное множество можно разбить на 2025 непересекающихся счётных множеств?

3. Ровно за минуту до Нового года Дед Мороз кладёт Васе под ёлку одну за другой по очереди 10 конфет, за полминуты до Нового года кладёт ещё 10 конфет (тоже по очереди), за четверть минуты — так же кладёт ещё 10, и так далее до бесконечности. Баба Яга за полминуты до Нового

Года съедает конфету, которую Дед Мороз положил первой, за четверть минуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил второй, и т. д. Сколько конфет будет под ёлкой в Новый год?

4. Пусть A и B — счётные множества. Что можно сказать про мощности объединения, пересечения и разности A и B ?

5. Будем называть *словом* произвольную (не обязательно осмысленную) конечную последовательность букв русского языка. Докажите, что:

(a) множество слов, состоящих из не более чем n символов, конечно;

(b) множество всех слов счётно.

6. (a) Может ли король обойти бесконечную шахматную доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

(b) Пусть есть счётное множество полностью заполненных супер-гостиниц. Все, кроме первой, закрыли на ремонт. Как найти всем постояльцам закрытых гостиниц отдельные места в первой гостинице, никого из нее не выселяя?

7. Докажите, что следующие множества счётны:

(a) \mathbb{Z} ;

(b) \mathbb{Q} ;

(c) множество квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами;

(d) множество чисел, являющихся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

8. Докажите, что на любом числовом интервале найдётся:

(a) хотя бы одно рациональное число;

(b) счётное множество рациональных чисел.



На огонь и воду можно смотреть бесконечно

Теория графов

Принцип крайнего в графах (8 июля 2025)

1. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.
2. На дискотеке юноши танцевали с девушками. Не было юноши, танцевавшего со всеми девушками, и не было девушки, которая не танцевала ни с кем. Докажите, что на дискотеке найдутся 2 юноши и 2 девушки, образующие идеальную четвёрку: они образуют паросочетание, и других рёбер в этой четвёрке нет.
3. Вершины графа покрашены в 3 цвета. Вершин каждого цвета ровно n . Каждая вершина соединена с $n + 1$ вершиной других цветов. Докажите, что существует треугольник с вершинами трех разных цветов.
4. 200 теннисистов сыграли 140 партий так, что каждый участвовал хотя бы в одной. Докажите, что найдутся 60 партий, в которых участвовали 120 различных теннисистов.
5. В стране из каждого города выходит не более 4 дорог. Также известно, что между любыми двумя городами существует путь, проходящий не более чем по двум другим городам. Докажите, что в этой стране не более 53 городов.
6. В графе n вершин, все вершины имеют одинаковую степень. Докажите, что в этом графе есть паросочетание, содержащее не менее, чем $\frac{n}{3}$ рёбер.
7. В компании из миллиона человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых.
8. Есть граф на 2025 вершинах. В нём нет циклов длины не более 6. Докажите, что степень какой-то вершины не более 12.
9. В графе G степень каждой вершины хотя бы t ($t \geq 2$). Докажите, что в G существует: (a) простой путь длины хотя бы t ; (b) простой цикл длины хотя бы $t + 1$.
10. В стране есть 100 городов и несколько дорог. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 400 дорог. Докажите, что существует 7 городов, никакие два из которых не соединены напрямую дорогой.
11. В графе n вершин, kn рёбер и нет циклов длины менее пяти. Докажите, что в этом графе есть k не пересекающихся по вершинам циклов.

Определение. Граф называется ориентированным (орграфом), если у каждого ребра определено направление (т.е. если вершины графа A и B соединены ребром, то ребро направлено либо от A к B , либо от B к A). Иначе говоря, у каждого ребра определено начало и определен конец.

1. Могут ли входящие степени вершин орграфа равняться $1, 3, 5, \dots, 43$ (каждая по одному разу), а исходящие — $0, 2, 4, \dots, 42$?
2. В стране n городов, каждые два из которых соединены дорогой. Президент хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него больше нельзя было вернуться. (a) Докажите, что он сможет это сделать. (b) Найдите количество способов таким образом ввести одностороннее движение.
3. Две команды набрали в однокруговом волейбольном турнире одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся команды A , B , и C такие, что A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A .
4. В классе каждый бросил бумажку в трех других ребят. Докажите, что можно рассадить ребят в семь аудиторий так, что в одной аудитории никто ни в кого бумажку не бросал.

Определение. Полный ориентированный граф называется турниром.

Теорема. В турнире есть путь, проходящий по всем вершинам ровно один раз.

5. Докажите, что в турнирном графе (количество вершин не меньше 4) всегда можно изменить ориентацию одного ребра так, что он станет сильно связным.
6. Есть турнир на 200 вершинах. Докажите, что можно найти простой путь из 199 ребер, в котором первые 100 ребер ориентированы в одну сторону, а следующие 99 — в другую.
7. Назовем царем вершину в орграфе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. (a) Докажите, что в любом турнире найдется царь. (b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников. (c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.

Определение. Орграф называется сильно связным, если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от A к B и наоборот. Орграф называется слабо связным если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от одной из них до другой.

8. Из сильно связного графа удалили все ребра, выходящие из одной вершины. Обязательно ли он останется слабо связным?

9. В сильно связном графе на n вершинах при удалении любого ребра сильная связность сохраняется. Какое минимальное число ребер может быть в таком графе?

Вопрос. Граф не является сильно связным. Как определить аналог компонент связности в этом случае? А как будет устроен граф компонент связности?

10. Пусть G – сильно связный турнир. Докажите, что любая его вершина принадлежит какому-то ориентированному треугольнику (циклу длины 3).

Лемма Холла (13 июля 2025)

Легенда. Пусть есть n пустынных и m верблюдов. Верблюды, как известно, очень привередливы и не готовы пускать к себе на спину кого попало. Назовем верблюда A *подходящим* для данного наездника B , если A готов пустить B к себе на спину.

Опр. Скажем, что выполнено *везучее* условие, если для любого подмножества из k пустынных есть хотя бы k верблюдов, подходящих кому-то из них.

Лемма Холла. Для того, чтобы можно было выдать каждому пустынному по своему подходящему верблюду, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено везучее условие.

Замечание. Лемма Холла является примером того, как почти очевидное необходимое условие оказывается еще и достаточным.

1. Докажите необходимость.

2. Достаточность докажем при помощи полной индукции по n .

(a) Докажите базу и сформулируйте переход.

(b) Для доказательства перехода нам надо как-то уменьшить количество пустынных, сохраняя везучее условие. Возьмем любого пустынного, дадим ему верблюда (почему можем?), и забудем про этих двоих добряков. В какой ситуации везучее условие больше не выполняется? Какое множество пустынных должно присутствовать в этом случае?

(c) Вернем забытых двоих и применим предположение к найденному множеству. Докажите, что если мы удалим этих пустынных и их верблюдов, то везучее условие сохранится.

(d) Завершите доказательство.

Опр. *Паросочетанием* в графе называется набор рёбер, никакие два из которых не имеют общей вершины.

Упр. Переформулируйте лемму на языке графов. Пока это не сделаете, дальше сдавать нельзя же-хе:)

3. В таблице $n \times m$ некоторые клетки отмечены. Для любого k все отмеченные клетки, лежащие в k любых строках, принадлежат хотя бы k различным столбцам. Докажите, что тогда можно выбрать n клеток, никакие две из которых не лежат в одной строке или одном столбце.

4. Прямоугольный лист бумаги разбит на n многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иголками так, что каждый из $2n$ многоугольников будет проткнут хотя бы один раз.

5. Дед Мороз принес n детям не меньше n подарков. Известно, что i -му ребенку нравятся x_i подарков, получив любой из которых, он станет счастливым. Также известно, что выполнено неравенство:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Докажите, что Дед Мороз может осчастливить всех детей.

6. С помощью леммы Холла докажите её альтернативные версии:

(а) Пусть $n < m$, все верблюды пускают к себе на спину одинаковое количество пустынников, а каждому пустыннику подходит одинаковое количество верблюдов. Докажите, что всем пустынникам можно выдать по верблюду.

(б) Пусть для любого подмножества из k пустынников есть хотя бы $k - d$ верблюдов, подходящих кому-то из них. Докажите, что всем пустынникам, кроме может быть каких-то d , можно выдать по верблюду.

(с) Пусть для любого подмножества из k пустынников есть хотя бы kd верблюдов, подходящих кому-то из них. Докажите, что всем пустынникам можно выдать по d верблюдов.

7. Пусть A — n -элементное множество. Докажите, что для всякого $k \leq \frac{n-1}{2}$ можно расширить каждое k -элементное подмножество до $(k+1)$ -элементного (добавив один элемент) так, чтобы все полученные $(k+1)$ -элементные подмножества будут различны.

8. Перед тем, как начать выдавать сок на обеде, Александр Михайлович решил дать детям последний шанс. Он позвал 10 из них и принес 19 разноцветных кепок. Далее дети закрыли глаза, и на их головах оказались 10 кепок, остальные были спрятаны. По команде дети должны открыть глаза и сказать цвет своей кепки (ребенок видит только чужие кепки!). Смогут ли дети договориться так, чтобы хотя бы один из них гарантированно был прав?

Вопрос 1 Среди любых 6 человек найдутся трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей?

Вопрос 2 Среди любых 9 человек найдутся трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых людей?

1. Назовем компанию людей $(m; n)$ -интересной, если в ней можно выбрать m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых людей. Докажите, что: (a) Максим и 9 его знакомых; (b) Максим и 9 с ним незнакомых; (c) Максим и 17 других людей являются $(4; 4)$ -интересными компаниями. (d) Докажите, что 14 человек являются $(3; 5)$ -интересной компанией.

Определение. Рассмотрим полный граф, ребра которого раскрашены в два цвета. Определим $R(m, n)$ при $m, n \geq 2$ наименьшее число вершин в таком графе, при котором заведомо найдется полный подграф первого цвета на m вершинах, либо полный подграф второго цвета на n вершинах.

Теорема Рамсея. $R(m, n)$ существует для любых натуральных m и n .

2. (a) Докажите, что $R(m, n) = R(n, m)$. (b) Найдите $R(n, 2)$.

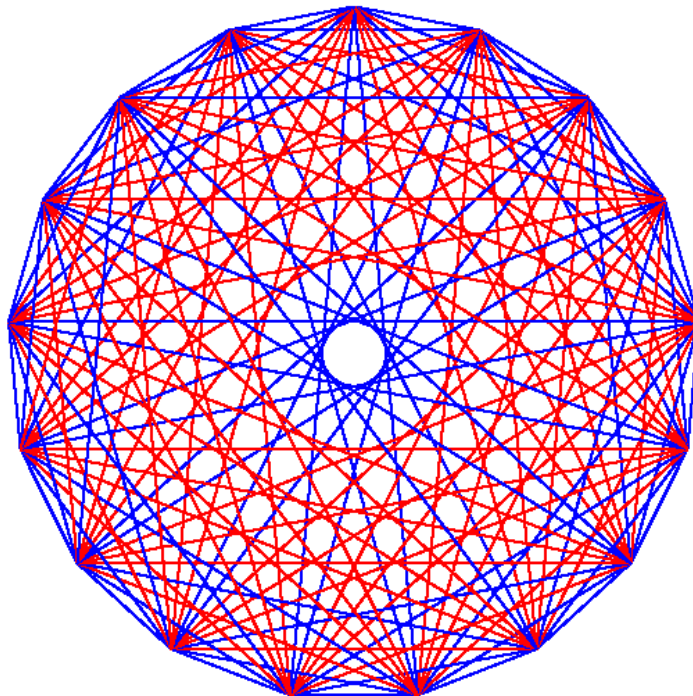
3. Докажите, что:

(a) $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$ при $m, n \geq 3$;

(b) $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.

(c) Докажите теорему Рамсея.

4. Найдите $R(4, 4)$.



Замечание: $R(4, 5) = 25$, $R(4, 6)$ и $R(5, 5)$ – науке неизвестны.

5. Даны 6 произвольных иррациональных чисел. Докажите, что можно выбрать из них 3 числа x, y, z так, что числа $x + y, y + z, z + x$ иррациональны.

6. Обобщите теорему Рамсея на случай трех цветов.

Теперь ясно, что можно применять теорему Рамсея для нескольких цветов.

7. **Теорема Шура.** Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x, y, z , для которых $x + y = z$.

8. Докажите, что

$$R((r - 1)(s - 1) + 1, (r - 1)(s - 1) + 1) > (R(r, r) - 1)(R(s, s) - 1).$$

9. **Бесконечная теорема Рамсея.** Ребра полного графа на бесконечном числе вершин покрашены в два цвета. Докажите, что в нем найдется бесконечный одноцветный подграф.



Без труда выделим подозрительную клику в любом графе

Усреднение и теория вероятностей

Усреднение (5 июля 2025)

Идея 1. Для того, чтобы посчитать среднее, зачастую полезно использовать двойной подсчет.

Пример. Суммарная температура 50 детей, стоящих по кругу, равна 1850°C . Маша записала суммарную температуру каждой группы из 10 подряд идущих детей. Чему будет равно среднее значение чисел Маши?

1. Дима записал на доску все последовательности из нулей и единиц длины 2025. Маша, посмотрев на эту прелесть, решила посчитать, сколько раз в каждой из них встречается пара подряд идущих цифр 0. Чему равно среднее значение всех 2^{2025} чисел Маши?

2. На двух окружностях с одинаковыми радиусами отмечено по $2n$ точек на одинаковом расстоянии, n из которых белые, остальные — чёрные. Первую окружность положили на вторую так, чтобы точки совпали, и начали вращать на $\frac{360^{\circ}}{2n}$. Посчитайте среднее количество совпадений по цветам среди $2n$ полученных наложений.

3. В графе на 16 вершинах 2025 ребер (кратные ребра разрешены). Посчитайте среднее количество ребер среди подграфов на 6 вершинах. Верно ли, что в этом графе обязательно найдется 6 вершин, между которыми суммарно проведено ≥ 254 ребра?

Идея 2. Если некоторая величина в среднем принимает значение m , то есть ситуации, в которой эта величина $\leq m$ и $\geq m$.

4. Все клетки бесконечной клетчатой доски покрашены в белый или чёрный цвет. Известно, что в каждом квадрате 3×3 не более пяти белых клеток. Докажите, что в каком-нибудь квадрате 4×4 не менее восьми чёрных клеток.

5. У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные загораются, включённые — гаснут. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю. Докажите, что, последовательно нажимая некоторые из переключателей, можно добиться того, что хотя бы половина лампочек горит.

6. Теперь лампочек всего 99, каждая присоединена ровно к 25 переключателям, а переключателей ровно 50. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включёнными.

7. По каждому из видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для

каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные)

8. Дано множество из n вещественных чисел, такое, что не все они равны нулю, но сумма всех равна нулю. Докажите, что эти числа можно обозначить за a_1, a_2, \dots, a_n таким образом, чтобы было выполнено $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 < 0$.

Введение в теорию вероятностей (12 июля 2025)

Опр. Пусть проводится некоторый эксперимент, при том известны все возможные его результаты. Назовем их *множеством элементарных исходов* Ω .

Пример. Например, пусть мы ровно 10 раз подбросили монетку. Результатами можем считать последовательности выпадения орлов и решек. Сколько будет элементарных исходов?

Опр. Отображение $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ называется *вероятностью* на Ω , если

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1.$$

Замечание. Заметим, что функция вероятности совсем не единственна для любой Ω . Но когда в задаче не сказано обратного, обычно предполагается, что элементарные исходы равновероятны.

Опр. Пара (Ω, \mathbb{P}) называется *вероятностным пространством*.

Опр. *Событием* называется любое подмножество Ω .

Опр. Пусть A — событие. Определим его вероятность так:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

Упражнение. Докажите свойства вероятности:

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

1. Докажите, что если элементарные исходы равновероятны, то $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

2. В каждом из пунктов ниже опишите вероятностное пространство и найдите количество элементарных исходов для данных событий (считаем, что все элементарные исходы равновероятны). Какова вероятность этих событий?

(a) n раз бросают монету — выпало k решек.

(b) n раз бросают игральный шестигранный кубик — сумма выпавших очков чётна.

3. Колоду из 36 карт раздают четверем людям, по 9 карт каждому.

(a) Какова вероятность того, что у каждого человека все карты одной масти?

(b) Какова вероятность того, что каждый получит по одному королю?

(c) Какова вероятность того, что каждый получит по королю и по две из оставшихся бубновых карт?

(d) Всегда ли $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$?

Опр. События называются *независимыми*, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

4. Кубик подбросили n раз. Докажите независимость результатов разных бросков (то есть независимость событий «при i -м броске выпало число a » и «при j -м броске выпало число b »). А если мы n раз подбросим монету? Покрутим рулетку?

5. Пять человек независимо друг от друга выбирают случайно и равновероятно одно из чисел от 0 до 9. Какое из событий более вероятно: «все выбранные числа различны» или «все выбранные числа делятся на 2»?

Замечание. В задаче 5 можно уже не задумываться о том, как конкретно выглядит Ω и какие вероятности на каждом элементарном исходе. Здесь задача нам говорит, что какое-то вероятностное пространство дано, а мы смотрим уже за событиями.

6. Каждый из детей группы профи сдаёт зачёт со своей вероятностью (независимо от остальных). Пусть p_k — вероятность того, что зачёт сдали ровно k из них. Ценностью курса назовём величину $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots$. Докажите, что если взять в профи ещё несколько человек, ценность курса не увеличится.

Опр. *Условной вероятностью* события A при условии события B называется величина

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

В прикладном смысле это вероятность события A в новом пространстве, где $\Omega = B$ и все вероятности элементарных исходов изначального пространства разделены на $\mathbb{P}(B)$. Иногда в задаче дана только условная вероятность.

7. Двое играют в русскую рулетку. Первый зарядил две пули в соседние отверстия барабана (в барабане 6 отверстий), совершил выстрел и остался в живых. Как поступить второму, чтобы шансы на выживание были больше: прокрутить барабан перед выстрелом или оставить имеющееся расположение?

8. Докажите формулу полной вероятности. Пусть даны непересекающиеся события B_1, \dots, B_n , такие, что $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

9. В очереди на самолёт находятся n пассажиров; все места проданы. Первой заходит сумасшедшая старушка и занимает произвольное кресло. Каждый следующий пассажир либо садится на своё место, либо, если оно занято — на чьё-нибудь другое. Какова вероятность, что...

(а) последний пассажир будет сидеть на своём месте?

(б) и последний, и предпоследний пассажиры будут сидеть на своем месте?

Случайности не случайны (20 июля 2025)

Опр. Пусть задано некоторое вероятностное пространство (Ω, \mathbb{P}) . *Случайной величиной*, заданной на этом пространстве, называется любое отображение $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. То есть каждому элементарному исходу сопоставляется какое-то число.

Примеры. Зачастую случайная величина берется вполне конкретная. Например, количество орлов, если мы 10 раз подбросили монетку, сумма очков на кубике при нескольких бросках подряд и т. п.

Загадка. Пусть X, Y — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве (Ω, \mathbb{P}) . Подумайте, что за объект скрывается под записью $\{X = 1\}$? $X + Y$? Что в таком случае значит запись $\mathbb{P}(X + Y = 1)$?

Опр. Математическим ожиданием случайной величины X , определенной на вероятностном пространстве (Ω, \mathbb{P}) , называется величина

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot X(\omega).$$

1. Влад уговорил маму сыграть с ним в такую игру. Влад называет целое число N , и если номер первого встреченного ими автомобиля оказывается больше или равен N , то Влад получает N рублей, в противном случае Влад платит маме 100 рублей. Номер автомобиля — число от 000 до 999, все варианты равновероятны.

(а) Выразите через N мат. ожидание выигрыша.

(б) Какое N надо назвать Владу, чтобы максимизировать средний выигрыш?

2. Пусть X, Y — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве (Ω, \mathbb{P}) . Докажите свойства мат. ожидания:

(а) Если $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)$, то $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

(б) (Линейность мат. ожидания).

• $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$;

• $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}X$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторое число.

(с) (Другая формула для нахождения мат. ожидания). Пусть область значений X — некоторое множество M . Тогда

$$\mathbb{E}X = \sum_{m \in M} \mathbb{P}(X = m) \cdot m.$$

(d) (Мат. ожидание индикатора). Пусть $\mathbb{I} = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \notin A \end{cases}$ для некоторого события A . Такая случайная величина называется индикатором. Докажите, что $\mathbb{E}\mathbb{I} = \mathbb{P}(A)$.

(e) (Неравенство Маркова). Пусть случайная величина X принимает неотрицательные значения, a — положительное число. Тогда $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$.

Подсказка: рассмотрите индикатор для события $\{X \geq a\}$, а потом внимательно изучите пункты выше:)

Прикольная идея. Линейность мат. ожидания открывает нам очень удобный способ его подсчета — через индикаторы.

3. В группе профи 31 человек. Во время ложного срабатывания пожарной сигнализации преподаватели вывели всех учеников из учебной аудитории. Когда звон прекратился, дети были пересчитаны, а пожарную уведомили о ложном срабатывании, дети вернулись и быстро сели на какие-то места, не обязательно свои. Случайная величина X равна количеству детей, севших на свое место.

(a) Представьте X как сумму индикаторных случайных величин.

(b) Найдите $\mathbb{E}X$.

4. Помните листочек на усреднение? Напомню условие пятой задачи:

У инженера Саши есть d лампочек и n переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные загораются, включённые — гаснут. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю.

Элементарные исходы вероятностного пространства — 2^n комбинаций нажатий на переключатели. Случайная величина X равна количеству включенных лампочек.

(a) Представьте X как сумму индикаторных случайных величин.

(b) Найдите $\mathbb{E}X$.

(c) Знакомо? Какой вывод можно сделать?

Это был путь длиной в 3 листка. Идея усреднения работает для мат. ожидания!!!!

5. Пусть $\mathbb{E}X = a$. Докажите, что $\exists \omega \in \Omega$, такой что $X(\omega) \geq a$.

6. В неориентированном графе n вершин и $nd/2$ рёбер, $d \geq 1$. Докажите, что существует такое упорядочение вершин графа (v_1, v_2, \dots, v_n) , в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более d из n пар $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)$ являются ребрами графа.

7. Докажите, что ребра полного графа на 2^n вершинах ($n > 1$) можно раскрасить в два цвета так, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на $2n$ вершинах.

Соревнования и игры

Вступительная олимпиада (2 июля 2025)

1. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки – одинаковое. Победителями считаются те, кто одержали наибольшее число побед. Могли ли девочки оказаться среди победителей? Ничьих в теннисе не бывает.
2. Внутри (не на границе) прямоугольника 7×12 выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя меньше 5.
3. На острове используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O . Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P , причём точка O лежит внутри треугольника BPC . На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω , описанная около треугольника PHD , вторично пересекает отрезок PC в точке Q . Докажите, что $AP = CQ$.
5. Конечно или бесконечно множество таких натуральных n , что число $(n!)^n + 1$ делится нацело на $n + 2025$?
6. В олимпиаде из 4 этапов участвует n школьников. Все участвуют в первом этапе, а во втором, третьем и четвёртом этапах — a, b, c участников соответственно. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, то должны выполняться неравенства $n \geq a \geq b \geq c \geq 0$. Кроме того, жюри хочет, чтобы во втором и в третьем туре вышло поровну участников (т. е. $a - b = b - c$). Докажите, что жюри может выбрать участников на все этапы олимпиады ровно C_{2n}^n способами. Способы считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.

Игра проводилась индивидуально. За верный ответ игрок получал стоимсот задачи (равную её номеру), а за верно выполненную тему — ещё 50 очков. У каждого игрока было право трижды за всю игру исправить ответ.

Геометрия с окружностями

10. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC , где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .
15. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AB = 5$, $BC = 5055$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD , касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN .
23. Катеты прямоугольного треугольника AB и AC равны 5 и 12 соответственно. Точка I — центр вписанной окружности, точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC , точка K — середина отрезка MI прямая CK пересекает AB в точке N . Найдите $CK : KN$.
25. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , M — середина стороны AC , а W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C . Оказалось, что $\angle AIM = 90^\circ$. В каком отношении точка I делит отрезок CW ?
27. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC . Точка K — середина отрезка AE . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB , и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC , пересекаются в точке D . Найдите углы треугольника BKD .

Алгебра и теория чисел

7. Сколько трёхзначных чисел дают остаток 3 при делении на 25 и остаток 7 при делении на 12?
16. Известно, что для некоторых действительных чисел a и b верно $a^2 + b^2 = 1$. Найдите, чему может быть равно значение выражения $a^6 + b^6 + 3a^2b^2$.
19. Найдите минимальное значение выражения $576x^{10} + 240x^2 + 25x^{-6}$ при положительных x .
25. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = 2025$?
33. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 2025$. За один ход разрешается стереть несколько чисел и вместо них написать остаток от деления на 7 их суммы. После нескольких шагов осталось два числа, одно из которых на 1234 больше второго. Найдите оба числа.

Теория вероятностей

11. Случайно и равновероятно выбрано целое число от 1 до 100. Найдите вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 8.

13. Какое наименьшее количество раз надо бросить кубик, чтобы количество выпавших очков было не менее 8 с вероятностью более $1/2$?
16. Сергей Вадимович выбирает на координатной плоскости точку с двумя нецелыми координатами. Известно, что вероятность выбора ее в верхней полуплоскости равна 0,66. Вероятность выбора ее в правой полуплоскости – 0,51. Вероятность выбора ее в четверти с нечетным номером – 0,73. Какова вероятность, что его точка окажется в третьей четверти?
21. В выпуклом шестиугольнике независимо друг от друга выбраны две случайные диагонали. Найдите вероятность того, что эти диагонали пересекаются внутри шестиугольника (внутри – то есть не в вершине).
39. Учитель хочет выдать детям индивидуальные домашние задания. Для этого он написал программу, которая генерирует квадратные уравнения $x^2 - bx + c^2 = 0$, выбирая числа b и c случайным образом из отрезка $[-1, 1]$. С какой вероятностью получившееся уравнение будет иметь корни?

Комбинаторика

9. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC ?
14. Прямоугольный параллелепипед размером $2025 \times 202 \times 25$ разбит на единичные кубики. Сколько всего образовалось параллелепипедов (включая исходный)?
21. Сколькими способами можно расселить 15 ЛМШат в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой? (Кроватей в комнату можно поставить столько, сколько понадобится.)
26. Вычислите коэффициент при x^{2025} в многочлене $(1 + x + x^2 + \dots + x^{2025})^5$ после приведения всех подобных членов.
30. Назовем кубик разноцветным, если все его вершины покрашены в восемь разных цветов. У маленького Казимира есть набор из 10 красок и целая гора нераскрашенных кубиков. Сколько разных разноцветных кубиков он может сделать?

Комбинаторная геометрия

9. Внутри квадрата отмечено 50 точек. Квадрат разбит на треугольники таким образом, что вершинами треугольников являются только отмеченные 50 точек и вершины квадрата, причем для любого треугольника из разбиения каждая отмеченная точка либо лежит вне этого треугольника, либо является его вершиной. Найдите число треугольников в разбиении.
11. На плоскости провели 6 прямых и отметили несколько точек так, что на каждой прямой оказалось ровно по три отмеченные точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

15. Нарисована окружность радиуса 100. Какое наибольшее количество попарно непересекающихся окружностей радиуса 99 можно нарисовать так, чтобы они ее касались?
24. На окружности отметили n точек. Оказалось, что среди треугольников с вершинами в этих точках ровно половина остроугольных. Найдите все значения n , при которых это возможно.
41. По каналу ширины 1, который в определенном месте поворачивает на 90° по отношению к своему первоначальному направлению, плывет ветка диаметра d (она может иметь любую форму). При каком наибольшем d ветка может иметь такую форму, чтобы проплыть поворот, не застряв в нем?

Матбой М8 обычный (10 июля 2025)

1. Лада по кругу написала 100 различных чисел. Ева посчитала сумму каждых двух соседних чисел Лады. Какое наименьшее количество различных значений могло у Евы получиться?
2. Дано составное число n . Выпишем все его делители $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Пусть $s > 1$ — фиксированное натуральное число. Может ли оказаться так, что для любого i ($1 \leq i < k$) число $d_i + d_{i+1}$ равно m_i^s , где m_i — некое натуральное число?
3. Группа пиратов поссорилась из-за полдника, и каждый из них держит двух других на прицеле. Все пираты вызываются по одному в некотором порядке. Если вызванный пират еще жив, он стреляет в обоих пиратов, в которых целится (некоторые из которых могут быть уже мертвы). Все выстрелы смертельны. После того как все пираты были вызваны, оказывается, что ровно 100 пиратов были убиты. Докажите, что если бы пиратов вызвали в любом другом порядке, по крайней мере 33 пирата были бы убиты.
4. В треугольнике ABC медиана AM образует угол 60° со стороной BC . На ней выбрана точка K так, что $AK = \frac{BC}{2}$. Докажите, что один из отрезков, соединяющих K с вершинами треугольника ABC , равен одной из его сторон.
5. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P , а на стороне BC точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.
6. Комиссар Каттани точно знает, что два преступника, укравших полдник, находятся в числе 10 подозреваемых. На опознании ответственный гражданин рассматривает фотографии трех подозреваемых и указывает на одного из них. Известно, что гражданин не может указать на невиновного человека, если среди трех предъявленных фотографий есть фотография преступника. Можно ли за шесть сеансов выявить обоих преступников?

7. Доска 8×8 раскрашена в два цвета. Оказалось, что при постановке ладьи на любую клетку она будет бить больше клеток цвета, отличного от своей клетки. Докажите, что в каждом ряду поровну клеток каждого цвета.

8. Докажите для положительных значений x, y, z, t неравенство:

$$\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2 + z^2 + t^2}} + \sqrt[4]{\frac{y^2}{z^2 + t^2 + x^2}} \geq \frac{2(x + y)}{x + y + z + t}.$$

Матбой М8 необычный (10 июля 2025)

В этом бою участвовали представители группы профи и обычных групп.

1. *Репьюнитом* называется число, десятичная запись которого состоит только из единиц, то есть число вида $1, 11, 111, \dots$. Петя перемножил 2025 различных репьюнита, и Вася перемножил 2025 различных репьюнитов. Оказалось, что произведения совпали. Докажите, что Петя и Вася перемножали одни и те же наборы репьюнитов.

2. Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC , в котором $AB = AC$. Отрезок CD — высота треугольника ABC . Окружность ω_1 с центром C и радиусом CD пересекает AC в точке K , продолжение AC за точку C — в точке L . Окружность ω_2 с центром B и радиусом BD пересекает ω_1 в точке E и отрезок DL в точке M . Докажите, что $BM \parallel EC$.

3. Группу гирь будем называть равной, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Докажите, что

$$AP \cdot BC + BP \cdot AC + CP \cdot AB \geq 4S_{ABC}.$$

5. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если же чередовать красные и зелёные дороги, то тоже всегда возвращаешься ровно через 6 переездов. Наконец, если чередовать жёлтые и зелёные дороги, то всегда возвращаешься ровно через 4 переезда. Какое наименьшее число городов может быть на планете?

6. Конечно или бесконечно множество точных квадратов, в двоичной записи каждого из которых единиц больше, чем нулей?
7. Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_k = a$ и $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_\ell = b$ — все делители натуральных чисел a и b соответственно. Найдите a и b , если $a_{2025} + b_{2025} = a$ и $a_{2026} + b_{2026} = b$.
8. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.

Матбой М7-М8 (15 июля 2025)

1. Натуральные делители натурального числа n упорядочили по возрастанию. Нашлись два соседних делителя a и b , такие что $a^2 + b^2 = 2n + 1$. Докажите, что число $4n + 1$ является квадратом натурального числа.
2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются в точке P . Оказалось, что углы APB и CPD равны. Докажите, что $AB + AC = BD + CD$.
3. Максим и Дима по очереди выписывают цифры от 1 до 9: сначала Максим выписывает 1, потом Дима дописывает к ней слева или справа 2, затем к получившемуся фрагменту Максим дописывает слева или справа 3, и т.д. Сможет ли Максим добиться того, чтобы полученное число делилось на 11?
4. На окружности отмечено 50 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноразноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?
5. Есть 9 камней весом 10, 20, ..., 90 г. В измерительный прибор можно положить три камня, и прибор укажет на средний по весу. Как с помощью нескольких применений прибора выбрать камни с суммарным весом 250 г?
6. Для положительных чисел a, b, c таких, что $c > a + b$, докажите неравенство $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > 2(a+b)^2c$.
7. Сколькими способами можно расставить ладей на доске 50×50 так, чтобы каждое поле (как пустое, так и занятое) было побито одинаковым числом ладей. (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет).
8. Прямая l проходит через вершину A треугольника ABC и пересекает его сторону BC в точке D . E и F — основания перпендикуляров из точек B и C на прямую l соответственно. Докажите, что если M — середина BC , то $ME = MF$.

1. Из бумаги вырезано 100 единичных квадратов. В каждом из них две стороны покрашены рыжим цветом, а две другие — зелёным. Всегда ли из этих квадратов можно сложить квадрат 10×10 так, чтобы каждые два соседних квадрата соприкасались сторонами разных цветов?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{3a + 4bc} + \frac{1}{3b + 4ac} + \frac{1}{3c + 4ab} = 3$.

Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c$.

3. В восьмом отряде 7 девочек. Каждый день некоторые из них приходят на зарядку. При этом для любых двух (не обязательно последовательных) дней найдутся две таких девочки, что первая была на зарядке только в первый из этих дней, а вторая — только во второй. Какое наибольшее количество дней так может продолжаться?

4. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM . На касательной в точке C к описанной окружности $\triangle BMC$ отмечена точка D так, что $\angle CBD = 90^\circ$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E . Докажите, что центр описанной окружности $\triangle BDE$ лежит на прямой AC .

5. На плоскости отмечены три точки A, B и C . Линейкой можно провести прямую через две ранее отмеченные точки. Также разрешается выбрать три отмеченные ранее точки X, Y и Z , не лежащие на одной прямой, и инструментом «разделитель» провести прямую, содержащую биссектрису угла XYZ . Наконец, можно отмечать точку пересечения двух ранее проведенных не параллельных прямых. Докажите, что таким образом можно построить центр окружности, описанной около треугольника ABC .

6. Пусть p и q — нечётные простые числа. Докажите, что целая часть числа $\frac{p^q + q^p}{pq}$ кратна двум.

7. Двое играют в следующую игру. На бумаге нарисовано дерево. Игроки по очереди красят вершины — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные вершины, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних вершин уже была покрашена в тот же цвет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася рёбра, а не вершины. Кто победит на этот раз?

8. У Даши есть квадратный огород, не ограниченный забором. Сквозь огород время от времени по прямой пролетают мухи. Даша хочет установить несколько прямолинейных фрагментов забора внутри или на границе участка так, чтобы муха, пролетая сквозь участок, обязательно врезалась в забор. Докажите, что суммарная длина забора должна быть не меньше удвоенной стороны участка.

Тур 1 (6 баллов, 10 минут)

1. Даны два квадратных трёхчлена, сумма коэффициентов каждого из которых равна 1. Эти трёхчлены перемножили и получили многочлен. Найдите сумму его коэффициентов.
2. Про четырёхугольник известно, что существуют две прямые, каждая из которых разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Обязательно ли он является квадратом?
3. В группе 15 человек знают алгебру, 16 человек знают геометрию, 20 человек знают комбинаторику и 21 человек знает теорию чисел. В группе нет людей, знающих три раздела, и 23 человека в группе знают ровно два раздела из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один раздел из перечисленных?

Тур 2 (7 баллов, 15 минут)

4. Найдите минимальное значение выражения $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{b+a}$ при положительных значениях переменных.
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD , если $AB = 2$ см.
6. Петя выбирает случайным образом двух рыбок в аквариуме. Известно, что вероятность того, что Петя выберет двух рыбок одного пола, равна $\frac{1}{2}$. Докажите, что общее число рыбок является точным квадратом.

Тур 3 (8 баллов, 20 минут)

7. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение: $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.
8. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка DE не больше половины периметра $\triangle ABC$.
9. Существуют ли три счётных множества, для которых пересечение любых двух из них счётно, а пересечение всех трёх — пусто?

Тур 4 (9 баллов, 25 минут)

10. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на n ?
11. В треугольнике ABC $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. На стороне AB выбрана такая точка P , что $\angle PCB = 30^\circ$, а на стороне AC — такая точка Q , что $\angle ABQ = 40^\circ$. Найдите угол QPC .
12. В компании из n человек есть «шпион» — человек, который знает каждого члена этой компании, но его не знает никто из них. Вы можете спросить любого из членов компании про любого другого человека, знает он его или нет, и получить честный ответ. Можно ли выявить «шпиона», задав $(n - 1)$ вопрос?

Довывод

1. На дискотеке присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.
2. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 40bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.
3. Дима и Маша хотят показать детям фокус. Сначала дети вписывают в клетки шахматной доски числа $1, 2, \dots, 64$ по своему усмотрению, а затем Маша смотрит на доску и закрывает доминошкой какие-то две соседние клетки. Дима, который не видел предыдущих действий, должен прийти и угадать, в какой клетке какое число закрыто. Удастся ли фокус Диме с Машей?
4. Разбейте все положительные рациональные числа на два непустых непесекающихся подмножества X и Y так, чтобы произведение любых двух чисел из разных подмножеств лежало в X , а произведение любых двух чисел (возможно, совпадающих) из одинаковых подмножеств лежало в Y .
5. Дан выпуклый шестиугольник, каждая большая диагональ которого делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

Вывод (для получения нужно решить четыре из задач 1–5)

6. Саша и Юра по очереди вписывают числа $1, 2, \dots, n^2$ в клетки квадрата $n \times n$ без повторений. Саша выигрывает, если в конце игры сумма чисел в некотором столбце делится на n . При каких n Юра сможет ему помешать?
7. Сколько существует натуральных $N \leq 2025$ таких, что найдутся действительные x, y, z , для которых $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$, а $\sqrt{x + N} + \sqrt{y + N} + \sqrt{z + N}$ — целое число?
8. На стороне BC треугольника ABC выбирается переменная точка D , а на сторонах AB, AC отмечаются точки E, F так, что $BD = DE, CD = DF$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF проходит через фиксированную точку, отличную от A .

Послевывод (для получения нужно решить все задачи 1–8)

9. Дано натуральное число n . Последовательность a_0, a_1, \dots, a_{2n} обладает следующими двумя свойствами:
 - для любого $0 \leq i \leq 2n$ выполнено $a_i \in [0; n]$;
 - для любого $0 \leq k \leq n$ и любого целого неотрицательного m среди чисел $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k}$ найдётся число, равное $\left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor$.
 Найдите количество таких последовательностей.

Множества и отображения

1. Способы задания множеств. Принадлежность, объединение, пересечение, разность, дополнение. $(B \subset A) \Leftrightarrow (B \cap A = B)$. Отображение. Инъективное, сюръективное, биективное отображение. Композиция. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения. Достаточное условие биективности композиции. Необходимые условия инъективности и сюръективности композиции.
2. Равномощность множеств. Счётность. Любое подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно. Супер-гостиница. Подселить конечное число постояльцев. Подселить всех из другой супер-гостиницы. Счётность \mathbb{Z} . Заселить счётное число супер-гостиниц в одну. Счётность \mathbb{Q} . На любом числовом интервале найдется счетное множество рациональных чисел.

Алгебра

3. Неравенство о среднем арифметическом и геометрическом: доказательство по индукции. Пример применения: задача на минимизацию выражения с расщеплением одного из слагаемых. Неравенство о среднем гармоническом.
4. Метод Штурма. Поведение выражений при сближении переменных с фиксированной суммой; с фиксированным произведением. Примеры применения метода: неравенство о среднем геометрическом, арифметическом и квадратическом; максимизация числа рёбер в « n -дольном» графе; максимизация суммы квадратов двузначных чисел; максимизация площади вписанного n -угольника.
5. Транснеравенство. Примеры применения. Неравенство Чебышёва.

Теория чисел

6. Функция Эйлера. Чётность для $n > 2$. Тождество Гаусса. Значение $\varphi(m^k)$. Мультипликативность. Общая формула $\varphi(n)$. Соотношение $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{\text{НОД}(m, n)}{\varphi(\text{НОД}(m, n))}$.
7. Полная и приведённая системы вычетов. Теорема Эйлера.
8. Показатель числа по модулю. Определение и свойства.
9. Доказать, что любая степень может начинаться с любой комбинации цифр.

Геометрия

10. Определение вектора как класса направленных отрезков, коллинеарность. Действия с векторами.
11. Определение материальной точки, центра масс. Основная теорема и ее следствие. Правило рычага. Правило группировки. Пример задачи на идею группировки по-разному.

12. Определение движения, его свойства, элементарные движения. Теорема о задании движения. Теорема Шалля. Классификация движений с точки зрения количества неподвижных точек и рода. Композиция элементарных движений.

13. Определение гомотетии, её свойства. Упражнения 1-3.

14. Определение поворотной гомотетии. Теоремы 1-3. Композиция поворотных гомотетий.

Комбинаторика

15. Идея усреднения. Задача про подграф на 6 вершинах. Обе задачи про лампочки.

16. Выбор экстремальных объектов в графах. Вершина максимальной степени, максимальное паросочетание, самый длинный путь. Подвешивание графа. Примеры применения.

17. Ориентированный граф. Свойство степеней вершин. Сильная и слабая связность. Компоненты сильной связности. Турнир. Транзитивные турниры и их количество. Теорема о пути в турнире. Лемма о царях.

18. Идея последовательной стабилизации. Примеры применения.

19. Лемма Холла и её доказательство полной индукцией. Альтернативные версии леммы Холла.

20. Числа Рамсея и их свойства. Теорема Рамсея. Теорема Рамсея для нескольких цветов. Два подхода к доказательству. Лемма Шура. Бесконечная теорема Рамсея.

Комбинаторная геометрия

21. Диаметр множества. Примеры. Задача о покрытии треугольника квадратами.

22. Задача о разбиении на прямоугольники. Три решения.

23. Определение выпуклого множества. Выпуклость пересечения. Выпуклое множество с тремя точками содержит треугольник.

24. Теорема Хелли для конечного числа фигур.

25. Теорема Юнга о накрытии кругом для конечного множества.

Теория вероятностей

26. Определения: элементарный исход, функция вероятности, вероятностное пространство, событие, вероятность события. Свойства вероятности, формула вероятности события в случае равновероятных элементарных исходов.

27. Независимость событий. Задача 4 (независимость результатов бросков кубика друг от друга).

28. Условная вероятность. Задача про русскую рулетку. Формула полной вероятности.

29. Определение случайной величины и математического ожидания. Три способа подсчета мат. ожидания. Свойства мат. ожидания. Неравенство Маркова.

30. Идея усреднения и мат. ожидание. Задачи 4 и 5.

Место для заметок, автографов и т. д.

Группа «18 корпус»=



= {Мария Александровна Семёнова, Дмитрий Сергеевич Суевалов, Ваня Птушкин, Дима Сергеев, Арсений Назарьян, Арсений Пестриков, Максим Мухаметов, Паша Тютюнник, Дима Прокошев, Андрей Бабушкин, Максим Плотников, Соня Матюшкина, Ульяна Черезова, Маша Ильина, Дима Ламзин, Кирилл Чумурин} \subset М8



С любовью,

преподаватели обычных групп М8=



= {Сергей Вадимович, Андрей Аркадьевич, Александр Михайлович,
Дмитрий Сергеевич, Мария Александровна}